**А.Е. Горчаков**

**Метод Гаусса для чайников.**

Метод Гаусса применяется при решении систем лине6йных уравнений. Справедливо считается, что это самый практичный метод их решения. Вместе с тем, у студентов иногда возникают трудности, связанные с пониманием сути этого метода. На мой взгляд, трудности эти вызваны тем, что метод использует алгоритм, который выглядит несколько запутанным (только выглядит). Попробую изложить этот алгоритм в форме, которая была бы понятна студенту-гуманитарию.

Суть метода Гаусса состоит в том, чтобы привести расширенную матрицу системы линейных уравнений, т.е. матрицу коэффициентов с добавленным к ней справа столбцом свободных членов, к ступенчатому виду. Матрицей ступенчатого вида называется матрица, у которой все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Такая матрица может иметь три основных вида (элементы, обозначенные как $a\_{ij}, представляют собой действительные числа)$:

а) $\left(\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&\cdots &a\_{1n}\\0&a\_{22}&\cdots &a\_{2n}\\\cdots &\cdots &\cdots &\cdots \\0&0&\cdots &a\_{nn}\end{matrix}\right)$ б)$\left(\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&\cdots &a\_{1n}\\0&a\_{22}&\cdots &a\_{2n}\\0&0&\cdots &a\_{nn}\\\cdots &\cdots &\cdots &\cdots \\0&0&\cdots &0\end{matrix}\right)$ в)$\left(\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&\cdots &a\_{1n}&a\_{1k}\\0&a\_{22}&\cdots &a\_{2n}&a\_{2k}\\\cdots &\cdots &\cdots &\cdots &\cdots \\0&0&\cdots &a\_{nn}&a\_{nk}\end{matrix}\right)$

Поскольку в методе Гаусса используется расширенная матрица коэффициентов, то теоретически мы должны иметь дело с видом в). Однако, все зависит от конкретных значений коэффициентов системы и мы можем получить еще 2 частных случая:

г) $\left(\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&\cdots &a\_{13}&a\_{14}\\0&a\_{22}&\cdots &a\_{21}&a\_{24}\\\cdots &\cdots &\cdots &\cdots &\cdots \\0&0&\cdots &0&a\_{34}\end{matrix}\right)$ д)$\left(\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&\cdots &a\_{13}&a\_{14}\\0&a\_{22}&\cdots &a\_{21}&a\_{24}\\\cdots &\cdots &\cdots &\cdots &\cdots \\0&0&\cdots &0&0\end{matrix}\right)$

Если мы, в результате преобразований, пришли к случаю в), то система имеет единственное решение. В случае г) система не имеет решений, поскольку, какое бы число мы не умножали на 0, мы не сможем получить действительное число, отличное от 0. В случае д) система имеет множество решений, поскольку хотя бы одна переменная умножается на коэффициент, равный 0 и в столбце свободных членов также стоит 0.

Теперь приступим к описанию метода получения ступенчатой матрицы. Для лучшего понимания сути метода возьмем матрицу размером 4х5 со следующими коэффициентами:

$$\left(\begin{matrix}5&10&16&19&-2\\7&14&20&27&0\\1&2&3&4&0\\3&5&6&13&5\end{matrix}\right)$$

На практике очень удобно когда элемент $a\_{11}$ равен 1. В нашем случае можно переставить строки местами, чтобы этого добиться. Но можно поступить и по-другому: поделить все элементы первой строки на ее первый член. Так и сделаем, в результате получим:

$$\left(\begin{matrix}1&2&3\frac{1}{5}&3\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\\7&14&20&27&0\\1&2&3&4&0\\3&5&6&13&5\end{matrix}\right)$$

Теперь, для удобства разделим страницу на 2 колонки. В левой будем размещать преобразования исходной матрицы, в правой будем формировать матрицу результата соответственно шагам алгоритма

Итак, исходная матрица

$$\left(\begin{matrix}1&2&3\frac{1}{5}&3\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\\7&14&20&27&0\\1&2&3&4&0\\3&5&6&13&5\end{matrix}\right)$$

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Нам надо добиться, чтобы все элементы первого столбца, кроме первого были равны 0. Это можно сделать складывая строки. В этом случае строка, которая прибавляется к текущей, должна иметь первый элемент, равный первому элементу текущей строки, но с обратным знаком. Поскольку первый элемент первой строки должен быть не нулевым, то ее и будем прибавлять ко всем остальным. Тем более что ее первый элемент равен 1. Для 2 строки получим$$\left(-7\right)×\left(\begin{matrix}1&2&\frac{16}{5}&\frac{19}{5}&-\frac{2}{5}\end{matrix}\right)$$$$+$$$$\left(\begin{matrix}7&14&\frac{100}{5}&\frac{135}{5}&0\end{matrix}\right)$$$$=$$$$\left(\begin{matrix}0&0&-\frac{12}{5}&\frac{2}{5}&\frac{14}{5}\end{matrix}\right)$$Далее, для 3-й строки$$\left(-1\right)×\left(\begin{matrix}1&2&\frac{16}{5}&\frac{19}{5}&-\frac{2}{5}\end{matrix}\right)$$$$+$$$$\left(\begin{matrix}1&2&\frac{15}{5}&\frac{20}{5}&0\end{matrix}\right)$$$$=$$$$\left(\begin{matrix}0&0&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{matrix}\right)$$И, наконец, для четвертой строки$$\left(-3\right)×\left(\begin{matrix}1&2&\frac{16}{5}&\frac{19}{5}&-\frac{2}{5}\end{matrix}\right)$$$$+$$$$\left(\begin{matrix}3&5&\frac{30}{5}&\frac{65}{5}&\frac{25}{5}\end{matrix}\right)$$$$=$$$$\left(\begin{matrix}0&-1&-\frac{18}{5}&\frac{8}{5}&\frac{31}{5}\end{matrix}\right)$$Итак, мы можем записать полученный результат:$$\left(\begin{matrix}1&2&3\frac{1}{5}&3\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\\0&0&-\frac{12}{5}&\frac{2}{5}&\frac{14}{5}\\0&0&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&-1&-\frac{18}{5}&\frac{8}{5}&\frac{31}{5}\end{matrix}\right)$$Поскольку 1 строка и первый столбец больше меняться не будут запишем их в матрицу результата. | Матрица результата после 1-го шага$$\left(\begin{matrix}1&2&3,2&3,4&-0,4\\0&\\_&\\_&\\_&\\_\\0&\\_&\\_&\\_&\\_\\0&\\_&\\_&\\_&\\_\end{matrix}\right)$$ |
| 2. Поскольку 1 строка и первый столбец полученной на 1 шаге матрицы больше нам не нужны будем работать с матрицей$$\left(\begin{matrix}0&-\frac{12}{5}&\frac{2}{5}&\frac{14}{5}\\0&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\-1&-\frac{18}{5}&\frac{8}{5}&\frac{31}{5}\end{matrix}\right)$$У этой матрицы на позиции $a\_{11}$ стоит 0, поэтому переставим строки местами:$$\left(\begin{matrix}-1&-\frac{18}{5}&\frac{8}{5}&\frac{31}{5}\\0&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&-\frac{12}{5}&\frac{2}{5}&\frac{14}{5}\end{matrix}\right)$$Полученная матрица уже имеет нужный нам вид, поэтому запишем ее 1 строку и 1 столбец в матрицу результатаПолученная матрица имеет нужный нам вид, поэтому запишем ее 1 строку и 1 столбец в матрицу результата. | Матрица результата после 2-го шага$$\left(\begin{matrix}1&2&3,2&3,4&-0,4\\0&-1&-\frac{18}{5}&\frac{8}{5}&\frac{31}{5}\\0&0&\\_&\\_&\\_\\0&0&\\_&\\_&\\_\end{matrix}\right)$$ |
| 3. Теперь будем работать с матрицей$$\left(\begin{matrix}-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{12}{5}&\frac{2}{5}&\frac{14}{5}\end{matrix}\right)$$Теперь умножая 1 строку на–($\left(\frac{12}{5}\right):\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{12}{5}\right)×\left(\frac{5}{1}\right)=12$)) и прибавляя ее ко 2 строке $$\left(-12\right)×\left(\begin{matrix}-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{matrix}\right)$$+$$\left(\begin{matrix}-\frac{12}{5}&\frac{2}{5}&\frac{14}{5}\end{matrix}\right)$$получим:$$\left(\begin{matrix}-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&-\frac{10}{5}&-\frac{10}{5}\end{matrix}\right)$$ | Матрица результата после 3-го шага$$\left(\begin{matrix}1&2&3,2&3,4&-0,4\\0&-1&-\frac{18}{5}&\frac{8}{5}&\frac{31}{5}\\0&0&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&0&\\_&\\_\end{matrix}\right)$$ |
| 4. У нас осталась 1 строка, ее тоже запишем в результат. Вот и все.$$\left(\begin{matrix}-\frac{10}{5}&-\frac{10}{5}\end{matrix}\right)$$ | Матрица результата после 4-го шага и последнего шага$$\left(\begin{matrix}1&2&3,2&3,4&-0,4\\0&-1&-\frac{18}{5}&\frac{8}{5}&\frac{31}{5}\\0&0&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&0&\frac{-10}{5}&\frac{-10}{5}\end{matrix}\right)$$ |

Теперь можно найти решение системы, которое в данном случае будет единственным.